Oscillateurs mécaniques forcés

Cadre de l'étude

Ce chapitre complète l'étude faite au ***chapitre 4 sur les oscillateurs harmoniques, amortis par frottement visqueux***. Etudiés précédemment en <u>régime libre</u> (sans excitation), on s'intéresse dans ce chapitre à l'influence <u>d'une excitation sinusoïdale</u>.
On va montrer que l'on obtient des réponses en élongation (x) et en vitesse ($\dot{x}$) similaires aux réponses en tension (aux bornes du condensateur) et en courant étudiées au ***chapitre 6 sur le circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé.***

I. Réponse d'un oscillateur à une excitation sinusoïdale - Régime transitoire, régime sinusoïdal forcé (rappel)

Nous reprenons l'exemple de la particule élastiquement liée (attachée à un ressort de raideur k), en mouvement rectiligne suivant l'axe horizontal Ox d'un référentiel galiléen. Cette particule est soumise à la force de rappel du ressort $(-kx\vec{e}_x)$ et à une force de frottement fluide $(-\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x)$. On rappelle que le poids et la réaction du support se compensent. En outre, pour compenser la perte d'énergie due aux frottements et ainsi entretenir les oscillations, la particule subit une force excitatrice sinusoïdale $\vec{f_e}(t) = Fcos(\omega t)\vec{e}_x$.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à cette particule dans un référentiel galiléen on obtient l'équation différentielle suivante (après projection sur la droite du mouvement Ox) :

$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} + Fcos(\omega t)$ soit $\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}cos(\omega t)}$

<u>Remarque</u> : Cette équation peut s'obtenir par une étude énergétique (Théorème de la puissance cinétique par exemple).
En généralisant cette équation différentielle au cas d'un oscillateur harmonique amorti unidimensionnel (un degré de liberté - paramètre de position x : élongation (ressort), angle (pendule)...) il vient :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}cos(\omega t)}$$

Cette forme canonique fait intervenir les grandeurs caractéristiques suivantes :

- $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$, pulsation propre de l'oscillateur.
- $\boxed{Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}}$, facteur de qualité.

On trouve également une autre forme canonique faisant intervenir le coefficient d'amortissement de l'oscillateur $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}cos(\omega t)$.

En posant le paramètre $\boxed{A = \frac{F}{m\omega_0^2}}$, homogène à une longueur, l'équation différentielle devient :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = A\omega_0^2 cos(\omega t)}$$

La solution x(t) de l'équation différentielle est la somme :

- de la solution générale de l'équation sans second membre $\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2 x=0 : x_l(t)$
  Ce régime libre a été étudié dans le chapitre 4 de mécanique et revu dans le chapitre 4 d'électrocinétique concernant le circuit RLC série soumis à un échelon de tension.

- d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $x_e(t)$
  Ce régime établi (ou permanent ou forcé) est de la même forme que l'excitation sinusoïdale soit :
  $\boxed{x_e(t)=X\cos(\omega t+\varphi)}$

Comme on l'a vu dans le chapitre 5 concernant le régime sinusoïdal, tant que le régime libre n'est pas négligeable devant le régime forcé, on parle de **régime transitoire** et $x(t)=x_l(t)+x_e(t)$.
Pour un système stable, $x_l(t)$ s'annule au bout d'un temps de l'ordre de quelques τ, temps de relaxation de l'oscillateur $\left(\tau\sim\frac{Q}{\omega_0}\right)$. On se trouve alors en présence du régime forcé $x(t)=x_e(t)$ que l'on va étudier dans la partie suivante.

II. Etude du régime sinusoïdal forcé

1) La solution forcée

Pour déterminer les caractéristiques X et φ de la solution forcée, nous allons utiliser la représentation complexe des grandeurs sinusoïdales comme nous l'avons fait dans les chapitres 5 et 6 d'électrocinétique :
$x(t)=X\cos(\omega t+\varphi)=R_e(\underline{x})$ avec $\underline{x}=Xe^{j(\omega t+\varphi)}=\underline{X}e^{j\omega t}$.

L'équation différentielle est remplacée par une équation algébrique complexe :

$$\boxed{\left(-\omega^2+j\omega\frac{\omega_0}{Q}+\omega_0^2\right)\underline{X}=\omega_0^2 A}$$

En faisant intervenir la **pulsation réduite** $\boxed{u=\frac{\omega}{\omega_0}}$ il vient : $\left(-u^2+j\frac{u}{Q}+1\right)\underline{X}=A$

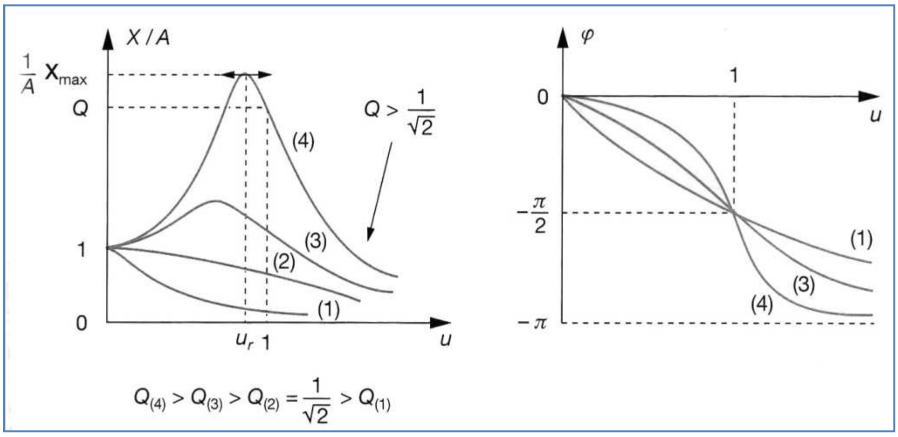
2) Résonance en élongation : étude de la réponse x(t)

$\boxed{\underline{X}=\frac{A}{1-u^2+j\frac{u}{Q}}=Xe^{j\varphi}}$ avec $\boxed{X=|\underline{X}|=\frac{A}{\sqrt{(1-u^2)^2+(\frac{u}{Q})^2}}}$ et $\boxed{\varphi=\arg(\underline{X})=-\arg\left(1-u^2+j\frac{u}{Q}\right)}$

L'expression de l'élongation est similaire à celle de la tension aux bornes du condensateur étudiée dans le chapitre 6.

Il y a **résonance en élongation**, c'est-à-dire quand la fonction X(u) passe par un maximun, si $Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Alors $X_{max}=X(u_R)=\frac{AQ}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$ où $u_R=\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ est la pulsation à la résonance.



Par analogie avec le chapitre 9 sur les filtres passifs, l'oscillateur se comporte comme un filtre passe-bas d'ordre 2.

En effet pour $u\gg1$ $(\omega\gg\omega_0)$, $X\ll A$ et l'oscillateur ne peut plus suivre les variations trop rapides de la force excitatrice $f_e(t)=F\cos(\omega t)=Am\omega_0^2\cos(\omega t)$.

3) Résonance en vitesse : étude de la réponse v(t)

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -X\omega\sin(\omega t + \varphi) = X\omega\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = V\cos(\omega t + \Phi)$$

Ainsi $\boxed{\boldsymbol{V = \omega X} = \frac{\omega A}{\sqrt{(1-u^2)^2+(\frac{u}{Q})^2}} = \frac{u\omega_0 A}{\sqrt{(1-u^2)^2+(\frac{u}{Q})^2}} = \frac{\omega_0 A}{\sqrt{(\frac{1}{u}-u)^2+\frac{1}{Q^2}}} = \frac{\boldsymbol{Q\omega_0 A}}{\sqrt{\boldsymbol{Q^2(\frac{1}{u}-u)^2+1}}}}$ et $\boxed{\Phi = \boldsymbol{\varphi + \frac{\pi}{2}}}$

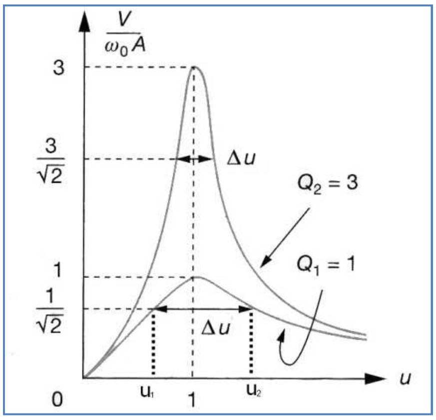
On retrouve les mêmes résultats en utilisant la notation complexe : $\underline{v} = j\omega\underline{x} = Ve^{j(\omega t+\Phi)} = \underline{V}e^{j\omega t}$

$\underline{V} = j\omega\underline{X} = \frac{j\omega A}{1-u^2+j\frac{u}{Q}}$ d'où $\boxed{\underline{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{j\omega\underline{X}} = \frac{\boldsymbol{Q\omega_0 A}}{\boldsymbol{1+jQ(u-\frac{1}{u})}}}$

L'expression de la vitesse est similaire à celle de l'intensité du circuit RLC série étudiée dans le chapitre 6.

Il y a **résonance en vitesse quelle que soit la valeur de Q** à la pulsation $u_R = 1$.

Alors à la résonance $V_{max} = V(u_R) = \boldsymbol{Q\omega_0 A} = \boldsymbol{\frac{F}{\alpha}}$.



Par analogie avec le chapitre 9 sur les filtres passifs, l'oscillateur se comporte comme un filtre passe bande.

La bande passante correspond au domaine $[u_1, u_2]$ tel que $V(u) \geq \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$. La largeur de la bande passante vérifie $\Delta u = u_2 - u_1 = \frac{1}{Q}$.

La résonance est d'autant plus aigüe (bande passante étroite) que le facteur de qualité est élevé (amortissement faible).

III. Aspects énergétiques

1) Bilan énergétique

L'énergie mécanique de l'oscillateur est : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$E_m = \frac{1}{2}m\omega^2X^2\sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kX^2\cos^2(\omega t + \varphi)$ fonction périodique de période $T' = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ et de valeur moyenne sur une période : $\langle E_m \rangle = \frac{1}{4}(k + m\omega^2)X^2$.

Le référentiel d'étude étant galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique est égale à la puissance des forces non conservatives (théorème de la puissance mécanique), ici la force excitatrice $\vec{f_e} = F\cos(\omega t)\vec{e}_x$ et la force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x$:

$$\frac{dE_m}{dt} = \vec{f}\vec{v} + \vec{f_e}\vec{v} = -\alpha v^2 + f_e v = p_d(t) + p_e(t)$$

En valeur moyenne sur une période T : $\frac{d\langle E_m \rangle}{dt} = \langle p_d(t) \rangle + \langle p_e(t) \rangle = P_d + P_e$.

Or $\frac{d\langle E_m \rangle}{dt} = 0$ d'où $\boxed{P_d + P_e = 0}$: **l'énergie fournie par la force excitatrice compense en moyenne l'énergie dissipée par frottement.**

2) Résonance en puissance

Expression de la valeur moyenne de la puissance dissipée par frottement, donc fournie par la force excitatrice : $P_e = -P_d = -\langle p_d(t) \rangle$ avec $-p_d(t) = \alpha v^2 = \alpha V^2 cos^2(\omega t + \Phi)$.
Ainsi $-P_d = \frac{\alpha V^2}{2}$ avec $V = \frac{V_{max}}{\sqrt{Q^2(\frac{1}{u}-u)^2+1}}$.
Par conséquent $-P_d = \frac{-P_{dmax}}{Q^2(\frac{1}{u}-u)^2+1}$ avec $-P_{dmax} = \frac{\alpha V_{max}^2}{2}$ pour u=1. Comme pour la vitesse, il y a un phénomène de résonance en puissance quelle que soit la valeur du facteur de qualité Q. Pour les pulsations de coupure de la résonance en vitesse $u_1\ et\ u_2$: $V = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$ soit $-P_d = \frac{-P_{dmax}}{2}$. Ainsi la puissance moyenne dissipée par frottement dans la bande passante est supérieure à la moitié de la puissance maximale dissipée à la résonance.

IV. Analogies électromécaniques

Dans le chapitre 4 d'électrocinétique, nous avons évoqué l'analogie entre l'oscillateur mécanique et électrique en régime libre. Nous précisons dans ce chapitre la correspondance entre ces mêmes **oscillateurs soumis à une excitation sinusoïdale en régime permanent**.

On définit **l'impédance mécanique complexe d'un oscillateur mécanique** comme le rapport entre la force excitatrice et la vitesse : $\boxed{\underline{Z}_m = \frac{\underline{f_e}}{\underline{v}}}$
L'équation du mouvement $m\dot{v} = -kx - \alpha v + f_e$ devient en notation complexe : $mj\omega\underline{v} = -k\frac{\underline{v}}{j\omega} - \alpha\underline{v} + \underline{f_e}$
soit $\boxed{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{m}} = \frac{\underline{\boldsymbol{f_e}}}{\underline{\boldsymbol{v}}} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{m\omega} - \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{\omega}})}$

L'impédance électrique de l'oscillateur électrique (circuit RLC série) est : $\boxed{\underline{\boldsymbol{Z}} = \frac{\underline{\boldsymbol{u_e}}}{\underline{\boldsymbol{i}}} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{L\omega} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{C\omega}})}$